NO DATE 22-5-17

β) Θα δ.ο. $f^{(n)}(0)=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y^k}{e^y}=0$$

Υπολογίζουμε τα όρια στο 0^+ κ. 0^-, δηλ. τα $f'_+(0)$ κ. $f'_-(0)$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y^2}}{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=0$$

Αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{1}{x}$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y^2}}{-\frac{1}{y}}=-\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=0$$

Αλλαγή μεταβλητής

$y=-\frac{1}{x}$

Συνεπώς $f'(0)=0$

Υποθ. ότι $f^{(n)}(0)=0$

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(0)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}-0}{x-0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{P_n(x)}{x^{3n+1}}e^{-1/x^2}$$

$$f^{(n+1)}_+(0)=\lim_{y\to+\infty}\frac{P_n(\frac{1}{y})\,y^{3n+1}}{e^y}=0$$

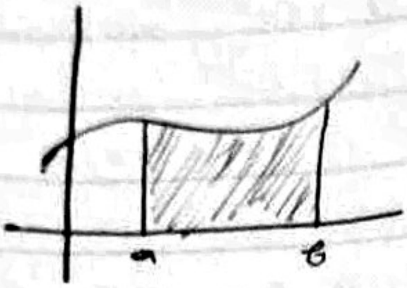
Ομοίως $f^{(n+1)}_-(0)=0$

Άρα $f^{(n+1)}(0)=0$

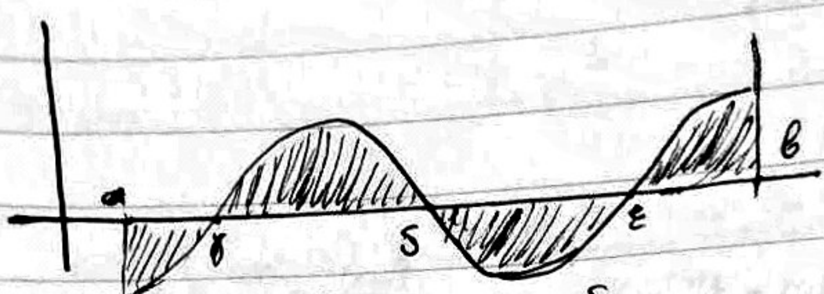
Σημείωση: Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι υπάρχουν απείρως παραγωγίσιμες συναρτήσεις $:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες δεν αναπτύσσονται σε δυναμοσειρά. Εδώ κάθε πολ. Taylor της f στο 0, θα είναι το μηδενικό πολ.

Εμβαδά

1) Αν $f(x) \geq 0$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, το εμβαδό που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τη γραφική παράσταση της f είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$

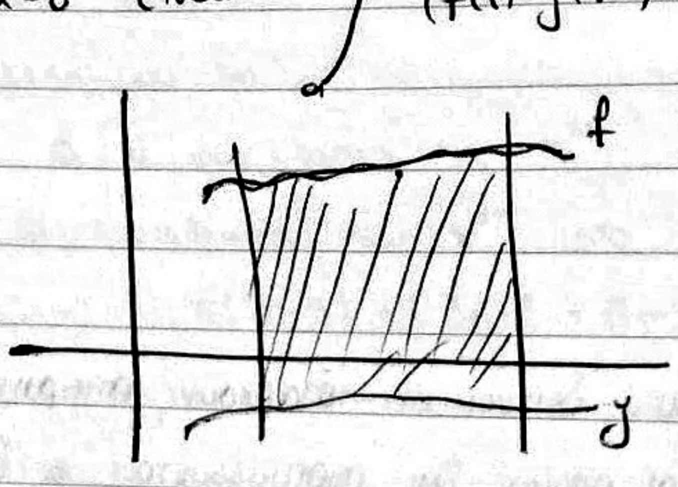


2) Αν η $f(x)$ δε διατηρεί πρόσημο, το γραμμοσκιασμένο εμβαδό



$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|dt = -\int_{\alpha}^{\gamma} f(t)dt + \int_{\gamma}^{\delta} f(t)dt - \int_{\delta}^{\varepsilon} f(t)dt + \int_{\varepsilon}^{\beta} f(t)dt$$

3) Αν $g(x) \leq f(x)$ δυο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις το εμβαδό που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g κ' τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι $\int_{\alpha}^{\beta} (f(t)-g(t))dt$

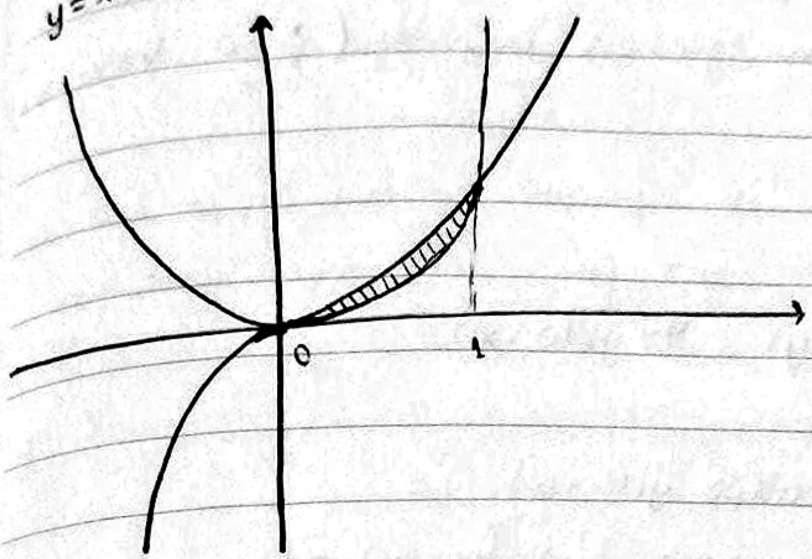


4) Αν δεν ισχύει $g \le f$

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|\,dt$$

Παραδείγματα

α) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = x^3$



$x^2 = x^3 \iff x = 0$ ή $x = 1$

και $x^3 \le x^2 \quad \forall x \in [0,1]$

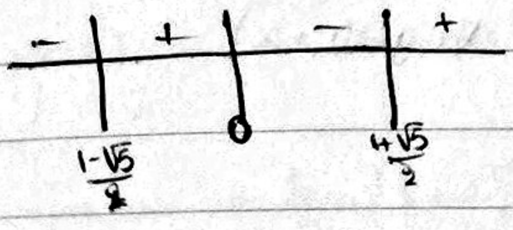
Το εμβαδόν είναι

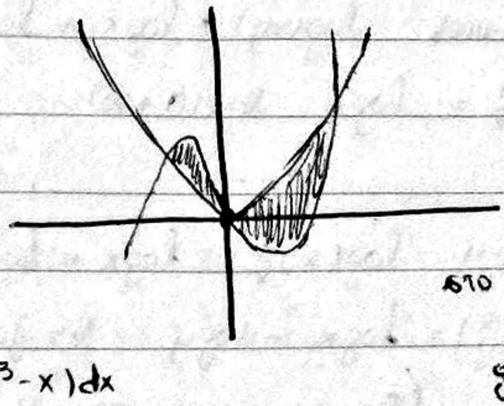
$$E = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

β) Να εκφραστεί συναρτήσει ολοκληρώματος το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφ. παραστάσεις των $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^2$

$x^3 - x = x^2 \iff x^3 - x^2 - x = 0 \iff x(x^2 - x - 1) = 0 \iff x = 0$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$x^3 - x \le x^2 \iff x^3 - x^2 - x \le 0 \iff x\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \le 0$





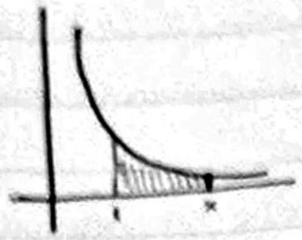
στο $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right]$ $g(x) \le f(x)$

στο $\left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ $f(x) \le g(x)$

$$E = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3 - x) - x^2\,dx + \int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} x^2 - (x^3 - x)\,dx$$

• Ορισμός λογαριθμικής συνάρτησης:

$\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$



Η $f(t)=\frac{1}{t}$, $t>0$ είναι συνεχής (άρα σε κάθε κλειστό διάστημα) ολοκληρώσιμη

Άρα από το Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειρ. Λογ. $\log'(x)=\frac{1}{x}$ $\forall x\in(0,+\infty)$.

Άρα η log είναι γνησίως αύξουσα ($\frac{1}{x}>0$ $\forall x\in(0,+\infty)$)

α) $\log 1 = 0$ (προφανές)

β) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ $\forall x,y\in(0,+\infty)$

ΑΠΟΔ.

Θεωρούμε τυχαίο αλλά σταθερό $y\in(0,+\infty)$.

Ορίζουμε $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\log(xy)-\log x$

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\frac{1}{xy}\,y-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$ $\forall x\in(0,+\infty)$

Άρα (αφού το π.ο. της g είναι διάστημα) προκύπτει ότι g σταθερή

Εφόσον $g(1)=\log y-\log 1=\log y-0=\log y$

Άρα $\log(xy)-\log x=\log y$ $\forall x\in(0,+\infty)$

Επομένως $\log(xy)=\log x+\log y$ $\forall x,y\in(0,+\infty)$

γ) $\log\frac{1}{x}=-\log x$ $\forall x\in(0,+\infty)$

ΑΠΟΔ.

$0=\log 1=\log\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=\log x+\log\frac{1}{x} \Rightarrow \log\frac{1}{x}=-\log x$

δ) $\log\left(\frac{x}{y}\right)=\log x-\log y$ $\forall x,y\in(0,+\infty)$

(Άμεσο από τα β), γ))

→

NO DATE

ε) $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

ΑΠΟΔ.

Από το β) προκύπτει εύκολα με επαγωγή ότι $\log(x^n) = n\log x$ $\forall x>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Άρα $\log(2^n) = n\log 2 \to +\infty$

$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = -\log 2^n = -n\log 2 \to -\infty$

Προκύπτει χρησιμοποιώντας ότι η log είναι γν. αύξουσα

ότι $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

στ) Από το ε) και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της log είναι το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Έτσι η $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί

ζ) $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$

ΑΠΟΔ.

Έχουμε $\lim_{x\to 1} \log x = 0 = \lim_{x\to 1}(x-1)$ και

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\log x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

η) $\log(e) = 1$

ΑΠΟΔ.

Εξ' ορισμού $e = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Εφόσον η log είναι συνεχής (στο e) προκύπτει

$$\log(e) = \lim_n \log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_n n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_n \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1} = 1$$

διότι $1+\frac{1}{n} \to 1$

και $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$

NO DATE

• **ΟΡΙΣΜΟΣ** Η αντίστροφη της λογαριθμικής συνάρτησης $\log:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ονομάζεται εκθετική συνάρτηση κ' συμβολίζεται με exp

$\exp:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$

Έτσι για $x\in(0,+\infty)$, $y\in\mathbb{R}$ $\quad \log x = y \iff \exp(y)=x$

$\log(\exp(y)) = y \quad \forall y\in\mathbb{R}$

$\exp(\log(x)) = x \quad \forall x\in(0,+\infty)$

Επειδή $\log(1)=0$ προκύπτει $\exp 0 = 1$

$\log(e)=1 \qquad \exp(1)=e$

$$\exp(a+b)=\exp(a)\cdot\exp(b) \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

<u>ΑΠΟΔ.</u>

$x=\exp(a)$, $y=\exp(b)$

$\Rightarrow a=\log x \qquad b=\log y$

Άρα $a+b=\log x+\log y=\log(xy)$

$\Rightarrow xy=\exp(a+b)$ δηλ. $\exp(a+b)=\exp a\cdot\exp b$

g παραγωγίσιμη συνάρτηση κ' γν. μονότονη κ' $g'(g^{-1}(x))\neq 0$

τότε $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}$. Έτσι

$$\exp'(x)=\frac{1}{\log'(\exp(x))}=\frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}}=\exp(x)$$

<u>Σημείωση</u>: Το $\exp(x)$ το συμβολίζουμε και με e^x

Λογαριθμική και εκθετική συνάρτηση με βάση α $(\alpha > 0, \alpha \neq 1)$

NO DATE

$\log_a(x) = \dfrac{\log x}{\log a} \quad \forall x > 0$

Εκθετική με βάση α

$f_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

$f_a(x) = \exp(x \log(a))$

$f'_a(x) = f_a(x) \cdot \log a$

<u>Σημείωση</u>: Το $f_a(x)$ συμβολίζεται και με a^x

Έστω $a > 0$

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$

(ή με τον άλλο συμβολισμό $f_{f_a(x)}(y) = f_a(xy)$)

<u>ΑΠΟΔ.</u>

Έστω $x \in \mathbb{R}$ τυχαίο αλλά σταθερό.

Ορίζουμε $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad h(y) = \dfrac{f_{f_a(x)}(y)}{f_a(xy)}$

$h'(y) = \dots = 0$

$h(0) = \frac{1}{1} = 1$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρ. σε κάθε διάστημα, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ $\forall x \geq a$. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

α) Αν $0 < \ell < +\infty$ τότε $\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty \iff \int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty$

β) Αν $\ell = 0$ και $\int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty$ τότε $\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$

γ) Αν $\ell = +\infty$ και $\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$ τότε $\int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty$

NO DATE

Παράδειγμα

Συγκλίνει $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+\sqrt{t}}\,dt$

ΑΠΟΔ.

$f(t) = \frac{1}{t^3+\sqrt{t}}$, $g(t) = \frac{1}{t^3}$, $t \geq 1$

$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^3}{t^3+\sqrt{t}} = 1$

Εφόσον το $\int_1^{+\infty} g(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt$ συγκλίνει

θα συγκλίνει και το $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+\sqrt{t}}\,dt$

Πρόταση (Κριτήριο ολοκληρώματος για σειρές):

Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ φθίνουσα με $f(t)\geq 0$ $\forall t$ κ. $a_k = f(k)$

Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\iff$ $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ συγκλίνει

ΑΠΟΔ.

$a_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) = a_k \quad \forall k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$) Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$

Τότε $\forall x > 1$

$\int_1^x f(t)dt \leq \int_1^{[x]+1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{[x]} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{[x]} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$

$\forall x \geq 1$

Άρα το όριο $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)dt$ υπάρχει, δηλ. το γενικευμένο ολοκλ.

$\int_1^{+\infty} f(t)dt$ συγκλίνει

(⇐) Αν το όριο $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,dt$ είναι πραγματικός αριθμός

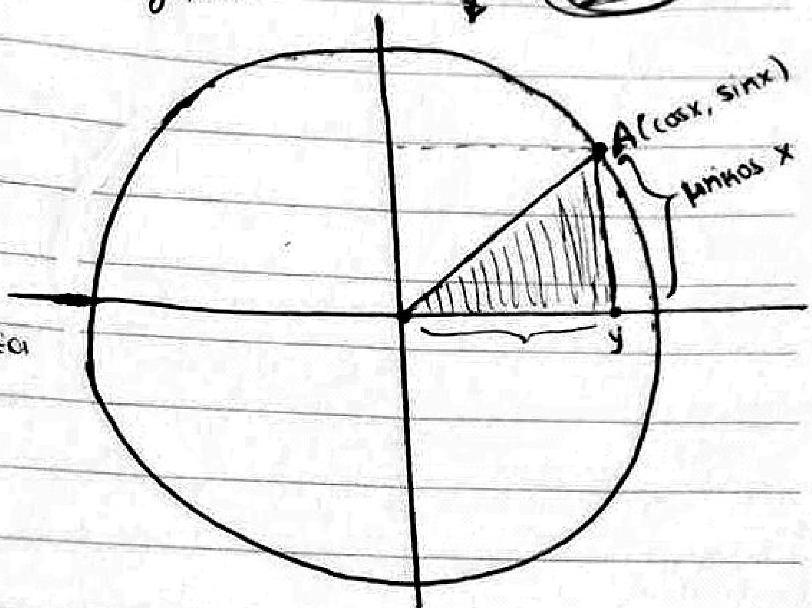
$\forall n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &= a_1 + (a_2 + \dots + a_n) \\ &\le a_1 + \left(\int_1^2 f(t)\,dt + \dots + \int_{n-1}^n f(t)\,dt\right) \\ &= a_1 + \int_1^n f(t)\,dt \le a_1 + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \end{aligned}$$

Συνεπώς η σειρά $\sum a_k$ συγκλίνει

ΕΚΤΟΣ

▲ ΟΡΙΣΜΟΣ: $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$



μήκος τόξου	εμβαδόν κυκλικού τομέα
2π	π
x	$\frac{x}{2}$

$$\frac{y\sqrt{1-y^2}}{2} + \int_1^y \sqrt{1-t^2}\,dt$$

Ορίζουμε $\arccos : [-1,1] \to \cancel{\mathbb{R}}\ [0,\pi]$

$$\arccos(y) = y\sqrt{1-y^2} + 2\int_y^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$\arccos(1) = 0 + 0 = 0$$

$$\arccos(-1) = 0 + 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt = \pi$$

$$(\arccos)'(y) = \dots = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} < 0 \quad \forall y\in(-1,1)$$

▲ ΟΡΙΣΜΟΣ: $\cos = (\arccos)^{-1} : [0,\pi] \to [-1,1]$

για να ορίζεται για $x\in[\pi,2\pi]$ $\quad \cos x = \cos(2\pi - x)$

Την επεκτείνουμε περιοδικά σε όλο το $\mathbb{R}$